

# Innhold

<b>Forord</b> .....	15
Struktur	15
Kommentarer til noen utvalgte tema	16
Notasjon	18
Litteratur	18
Takk	18

## I **Vektorer i dimensjon 2 og 3**

<b>Introduksjon</b> .....	20
---------------------------	----

<b>1</b>	<b>Vektorer i planet</b> .....	21
1.1	Vektorer som piler	21
1.2	Addisjon av vektorer	23
1.3	Skalering av vektorer	25
1.4	Parallele vektorer og skalering	27
1.5	Punkter og vektorer	29
1.6	Vektorer i et koordinatsystem	31
1.7	Basisvektorer og dekomponering	33
1.8	Norm – lengden til en vektor	35
1.9	Normalisering av vektorer	38
1.10	Skalarproduktet mellom to vektorer	39
1.11	Skalarproduktet på koordinatform	42
1.12	Indreprodukt med hensyn til en basis	43
1.13	$2 \times 2$ -determinanter	45
1.14	To likninger med to ukjente	47

<b>2</b>	<b>Vektorer i rommet</b> .....	<b>51</b>
2.1	Vektorer som piler i rommet	51
2.2	Figurer – GeoGebra	53
2.3	Norm og indreprodukt	55
2.4	Linjer og plan i rommet	56
2.5	Vektorproduktet	58
2.6	Vektorproduktet på koordinatform	60
2.7	$3 \times 3$ -determinanter	62
2.8	Tre likninger med tre ukjente	64
2.9	Vektorproduktet og plan i rommet	66
2.10	Avstand mellom punkt, linjer og plan	68

## II **Vektorrom**

<b>3</b>	<b>Vektorrom med koordinater</b> .....	<b>74</b>
	Introduksjon	74
3.1	$\mathbb{R}^n$ som vektorrom	75
3.2	Underrom av $\mathbb{R}^n$	77
3.3	Indreprodukter i $\mathbb{R}^n$ – Gram-Schmidt	79
3.4	Hyperplan	82
3.5	Refleksjon om hyperplan	83
3.6	Ortogonalt komplement og ortogonal projeksjon	85
3.7	Minste kvadratets metode	88
<b>4</b>	<b>Vektorrom fra aksiomer</b> .....	<b>92</b>
	Introduksjon	92
4.1	Aksiomene for vektorrom	92
4.2	Aksiomene for indreprodukt og norm	96
4.3	Vektorrom av polynomer	99
4.4	Underrom	101
4.5	Lineær uavhengighet og basis til vektorrom	102
4.6	Skifte av basisvektorer	104
4.7	Dimensjonen til et vektorrom	105
4.8	Komplementære underrom	107

**III****Lineære avbildninger**

<b>5</b>	<b>Lineære avbildninger</b> .....	<b>110</b>
	Introduksjon	110
5.1	Lineære avbildninger	111
5.2	Lineære avbildninger og matriser	113
5.3	Sammensetning av lineære avbildninger	115
5.4	Kjernen og bildet til en avbildning	116
5.5	Injektive, surjektive og bijektive avbildninger	117
5.6	Basiser – isomorfier med $\mathbb{R}^n$	120
5.7	Isometrier	121
<b>6</b>	<b>Dualrom og indreprodukt</b> .....	<b>124</b>
	Introduksjon	124
6.1	Dualrom og lineære former	125
6.2	Vektorrom av lineære avbildninger	127
6.3	Algebraer	128
6.4	Indreprodukt og dualrom	129
6.5	Adjungerte avbildninger	130
6.6	Adjungerte- og duale avbildninger	131
6.7	Selvadjungerte selvavbildninger	132
<b>7</b>	<b>Idempotent og nilpotent</b> .....	<b>134</b>
	Introduksjon	134
7.1	Idempotente avbildninger – projeksjoner	135
7.2	Refleksjoner	137
7.3	Ortogonale projeksjoner	138
7.4	Nilpotente avbildninger	139
7.5	Jordan-normalform av nilpotente avbildninger	142
<b>8</b>	<b>Konstruksjoner på vektorrom</b> .....	<b>145</b>
	Introduksjon	145
8.1	Funktorer og naturlige avbildninger	145
8.2	Direkte sum av vektorrom	148
8.3	Ekvivalensrelasjoner og kvotienter av mengder	151
8.4	Kvotienter av vektorrom	154
8.5	Tensorprodukt av vektorrom	155

8.6	Tensor- og Kronecker-produkt av matriser	158
8.7	Symmetriske produkt og ytreprodukt	159

## IV **Matrisealgebra**

<b>9</b>	<b>Matrisealgebra</b> .....	<b>164</b>
	Introduksjon	164
9.1	Matriser	165
9.2	Addisjon og skalarmultiplikasjon av matriser	166
9.3	Matrisemultiplikasjon	168
9.4	Identitetsmatriser og diagonalmatriser	172
9.5	Potenser av matriser	175
9.6	Idempotente- og nilpotente matriser	177
9.7	Transponering	179
9.8	Triangulære matriser	182
9.9	Radvektorer eller søylevektorer?	184

## V **Likningssystemer og matriser**

<b>10</b>	<b>Lineære likningssystemer</b> .....	<b>188</b>
	Introduksjon	188
10.1	Én lineær likning	189
10.2	System av flere lineære likninger	191
10.3	Innsettings- og addisjonsmetodene	193
10.4	Matriser av koeffisienter	196
10.5	Radoperasjoner	198
10.6	Homogene og partikulære løsninger	202
10.7	Matriser på trappesform	204
10.8	Rangen til en matrise	208
10.9	Gauss-Seidel- og Jacobi-metodene	212
<b>11</b>	<b>Eksempler – likningssystemer</b> .....	<b>216</b>
11.1	Kurvetilpassing – graf gjennom punkter i planet	216
11.2	Vandermonde-matriser	220
11.3	Lineære kombinasjoner	222
11.4	Ortogonale komplement	223

11.5	Newton's avkjølingslov	224
11.6	Spesiell lineær gruppe over heltallene	226
<b>12</b>	<b>Inverterbare matriser</b> .....	<b>231</b>
	Introduksjon	231
12.1	Radoperasjoner – venstre matrisemultiplikasjon	232
12.2	Inversmatriser	234
12.3	Ortogonale matriser	238
12.4	Inversmatriser og radoperasjoner	240
12.5	LU-faktorisering	243
12.6	Geometriske rekker av kvadratiske matriser	245
12.7	Flere oppgaver	247
<b>13</b>	<b>Eksempler</b> .....	<b>249</b>
13.1	Minste kvadraters metode	249
13.2	Redusert trappeform som idempotent	251
13.3	Digitale bilder	252
13.4	Markov-kjeder	254
<b>VI</b>	<b>Eigenverdier og egenvektorer</b>	
<b>14</b>	<b>Diagonalisering av matriser</b> .....	<b>262</b>
	Introduksjon	262
14.1	Eigenverdier og egenvektorer	262
14.2	Eigenverdier og determinanter	267
14.3	Konjugerte matriser	270
14.4	Diagonalisering	273
14.5	Potenser av diagonaliserbare matriser	278
14.6	Røtter av matriser	280
14.7	Konjugering med elementære matriser	281
14.8	Jordan-normalform av en triangulær matrise	284
14.9	System av lineære differensiallikninger	288
<b>15</b>	<b>Tilnærming av eigenverdier</b> .....	<b>292</b>
	Introduksjon	292
15.1	Potensmetoden	293

15.2	Diagonaldominante matriser	295
15.3	Nær triangulære matriser	298
15.4	Gram-Schmidt og QR-faktorisering	299
15.5	Hessenberg- og Householder-matriser	302

<b>16</b>	<b>Spektralsatsen og SVD</b> .....	<b>305</b>
	Introduksjon	305
16.1	Symmetriske- og skjevsymmetriske matriser	306
16.2	Spektralsatsen	308
16.3	Singulærverdidekomposisjon – SVD	311
16.4	Eksempler på SVD	314
16.5	Avkortet SVD – tilnærmet matrise	317
16.6	Pseudoinvers og kompakt SVD	319
16.7	Kondisjonstallet til en matrise	322
16.8	Singulærverdier til en sum av to matriser	324

## VII **Kvadratiske former – spor – matrisenorm**

<b>17</b>	<b>Kvadratiske former</b> .....	<b>328</b>
	Introduksjon	328
17.1	Positivt bestemte kvadratiske former	329
17.2	Bilineære funksjoner	331
17.3	Kvadratiske former og matriser	333
17.4	Cholesky-faktorisering	335
17.5	Felles ortogonal basis for to indreprodukter på $\mathbb{R}^n$	337
17.6	Kongruens	338
17.7	Fullføring av kvadrat	342
17.8	Røtter av ikke-negativt bestemte matriser	345
17.9	Polardekomposisjon og absoluttverdien til matriser	346
<b>18</b>	<b>Spor til matriser</b> .....	<b>349</b>
	Introduksjon	349
18.1	Spor – sum av diagonalelementene til en matrise	349
18.2	Spor til positivt bestemte matriser	353

<b>19</b>	<b>Matrisenorm</b> .....	<b>356</b>
	Introduksjon	356
19.1	Vektorrom av matriser	356
19.2	Frobenius-normen	357
19.3	Operatornormen	359
19.4	Operatornormen for den euklidske normen	361
19.5	Norm på dualrom og dual norm	364
19.6	Spornormen	365
19.7	Rang $k$ avkorting av SVD – Echart-Young	366

## VIII Permutasjoner og grupper

<b>20</b>	<b>Permutasjoner</b> .....	<b>372</b>
	Introduksjon	372
20.1	To beskrivelser av permutasjoner	372
20.2	Permutasjonsmatriser	377
20.3	Pariteten til en permutasjon	378
<b>21</b>	<b>Grupper og matriser</b> .....	<b>381</b>
	Introduksjon	381
21.1	Aksiomene for grupper	381
21.2	Normale undergrupper	386
21.3	Generatorer og relasjoner	389
21.4	Smith-normalform	391
21.5	Endelig genererte Abelske grupper	395
21.6	Simple grupper – alternerende grupper	398

## IX Determinanter

	<b>Introduksjon</b> .....	<b>402</b>
<b>22</b>	<b>Determinanter</b> .....	<b>405</b>
22.1	Determinanten til $2 \times 2$ -matriser	405
22.2	Determinanten til $n \times n$ -matriser	407
22.3	Radoperasjoner og determinanten	409
22.4	Determinanten respekterer produkt	412

22.5	Formel for determinanten	413
22.6	Determinanten respekterer transponering	415
22.7	Geometrisk fortolkning av determinanten	416
22.8	Sylvesters kriterium for positivt bestemte matriser	417
<b>23</b>	<b>Inverser og determinanter</b> .....	<b>419</b>
23.1	Cramers regel	419
23.2	Formel for inversmatrisen	420
23.3	Rekursiv beskrivelse av determinanten	424
23.4	Eksempel fra kretslære	425
<b>24</b>	<b>Cayley-Hamilton og Pfaffian</b> .....	<b>428</b>
	Introduksjon	428
24.1	Karakteristiske polynomer	429
24.2	Cayley-Hamilton	430
24.3	Polynomialgebraer og potenser av matriser	433
24.4	Ortogonal avbildning – rotasjon i plan	435
24.5	Krylov-rom	436
24.6	Pfaffian og determinanten til skjevsymmetriske matriser	437

## X

## Vektorrom over komplekse tall

<b>25</b>	<b>Komplekse tall</b> .....	<b>442</b>
	Introduksjon	442
25.1	Komplekse tall utvider reelle tall	443
25.2	Komplekskonjugert og absoluttverdi	445
25.3	Fundamentalsatsen i algebra	447
25.4	Geometrisk beskrivelse av komplekse tall	448
25.5	Komplekse tall som matriser	450
25.6	Trigonometriske funksjoner og komplekse tall	451
25.7	de Moivres formel	454
25.8	Ekspontfunksjonen for komplekse tall	456
<b>26</b>	<b>Komplekse vektorrom</b> .....	<b>458</b>
	Introduksjon	458
26.1	Komplekse vektorer og matriser	459



26.2	Komplekse vektorrom som reelle vektorrom	461
26.3	Hermitisk konjugasjon	463
26.4	Indreprodukt i komplekse vektorrom	463
26.5	Unitære og Hermitiske matriser	466
26.6	Fourier-transform	468
26.7	Kvaternioner	469
<b>27</b>	<b>Spektralsatsen</b> .....	<b>473</b>
	Introduksjon	473
27.1	Schur-faktorisering	474
27.2	Spektralsatsen – normale matriser	477
27.3	System av lineære differensiallikninger	481
27.4	Matriser på Jordan-normalform	483
27.5	Minimale polynomer	485
	<b>Referanser</b> .....	<b>487</b>
	<b>Indeks</b> .....	<b>489</b>